M2 Mathématiques fondamentales

Année 2023-2024

Le responsable du Master 2 Mathématiques fondamentales est

Tobias Schmidt `tobias.schmidt@univ-rennes1.fr`.

Les cours sont organisés en thématiques :

Au premier semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 24 crédits en suivant quatre cours d'une même thématique ou en mixant plusieurs thématiques. Les 6 crédits restants correspondent à l'étude d'un texte, le séminaire. Au premier semestre, les cours sont des cours fondamentaux et nombre d'entre eux sont regroupés par paires au sens où l'un s'appuie sur l'autre comme prérequis, ou plus encore en est la suite.

Au second semestre, il faut valider 30 crédits ECTS dont 12 crédits en suivant deux cours parmi ceux proposés dans les différentes thématiques, voire dans un autre master. Ces cours sont par essence plus spécialisés. Les 18 crédits ECTS restants correspondent au cours de langue (3 ECTS) et au stage de recherche (15 ECTS).

Il est possible de suivre plus de cours que nécessaires. Il est également possible de valider des cours du master 2 partenaire de l'Université de Nantes (avec des frais de transport pris en charge par le Centre Henri Lebesgue) et de l'Université de Potsdam (cours en distance) et, sous réserve de validation préalable du responsable pédagogique, dans d'autres masters rennais.

Thématique « aléatoire »

Premier semestre.

* **Processus stochastiques** (6 ECTS) par Jean-Christophe Breton

L'objectif de ce cours est de donner une présentation concise mais rigoureuse de la notion d'intégrale stochastique par rapport aux semi-martingales continues, en portant une attention particulière au mouvement brownien, qui jouera le rôle de fil conducteur.

* **Calcul stochastique** (6 ECTS) par Arnaud Debussche

Ce cours fait suite à celui de *Processus stochastiques*. Le cours commence par l'étude de quelques outils fondamentaux du calcul stochastique (formule d'Itô, théorème de Girsanov, représentation de martingale) puis explore la notion d'équation différentielle stochastique.

* **Apprentissage statistique et grande dimension** (6 ECTS) par François Portier

Nous présenterons un aperçu des méthodes principales d'apprentissage statistique, en particulier dans le cas de la grande dimension, en insistant sur la qualité des estimateurs établie via des bornes de risque. Le programme du cours comprend notamment les méthodes par moyenne locale, les techniques de régularisation (SVM, Lasso, etc), les méthodes d'agrégation (arbres et forêts aléatoires, boosting) et la sélection d'hyper-paramètres par validation croisée.

* **Statistique asymptotique et dépendance** (6 ECTS) par Lionel Truquet

L'objectif de ce cours est d'introduire le cadre asymptotique qui permet de montrer la consistance et d'étudier les lois limites d'estimateurs de paramètres que ce soit dans un cadre paramétrique ou non paramétrique. A cet effet, nous étudierons les problèmes de convergence uniforme et présenterons une introduction à la théorie des processus empiriques. Les résultats présentés permettront en particulier d'étudier la convergence des M-estimateurs ou des estimateurs à noyaux. Enfin nous nous intéresserons à des cadres d'échantillons non i.i.d. pour lesquels la plupart de ces résultats se généralisent.

* **Concentration de la mesure et statistique non-asymptotique** (6 ECTS) par Adrien Saumard

> Nous développerons dans une première partie de ce cours les outils de concentration de la mesure, essentiellement dans les espaces produits, c'est-à-dire pour des variables indépendantes. Nous établirons en particulier les inégalités dites de Talagrand pour le supremum du processus empirique. Dans un second temps, nous appliquerons ces résultats dans le contexte d'une analyse non-asymptotique de procédures statistiques non-paramétriques.

Second semestre.

* **Chemins rugueux** (6 ECTS) par Ismaël Bailleul

> Un grand nombre de systèmes naturels sont décrits par des chemins à valeurs dans un espace de Banach ayant une dynamique décrite par des équations différentielles $\dot{y}_t = f(y_t)\dot{h}_t$. Une telle équation traduit le fait que l'accroissement infinitésimal du chemin y est proportionnel à l'accroissement d'un signal h qui le conduit. Les équations élémentaires correspondent au cas où $h_t = t$, mais de nombreuses situations requièrent de considérer le cas de signaux h pas même dérivables ; c'est typiquement le cas qui se présente dans l'étude des équations différentielles stochastiques, où h est une trajectoire de mouvement brownien.
> Comment alors donner un sens à l'équation ci-dessus ? La théorie des chemins rugueux fournit un cadre optimal pour répondre à de telles questions, dont le cadre d'application va des systèmes contrôlés, déterministes ou stochastiques, à l'étude d'ÉDPs avec bruit aléatoire et au *machine learning* ! Ce cours sera aux deux tiers purement déterministe et pourra à ce titre intéresser également tous les étudiants du parcours *Analyse*.

* **Jeux à champ moyen** (6 ECTS) par Hu Ying

> Les jeux à champ moyen décrivent l'évolution en temps continu d'un grand nombre d'agents interagissant entre eux. Introduits par Lasry et Lions, les modèles étudiés dans ce cours ont à voir avec divers problèmes d'optimisation, d'équations aux dérivées partielles (Hamilton–Jacobi, Fokker-Planck,*etc.*), d'analyse stochastique (équations différentielles stochastiques rétrogrades) ou de théorie des jeux.

* **Zéros de processus gaussiens** (6 ECTS) par Jurgen Angst et Guillaume Poly

> Nous commencerons par introduire les concepts principaux des champs Gaussiens aléatoires et quelques inégalités fonctionnelles classiques (Slepian, Sudakov, Fernique, isopérimétrique..). Ensuite nous étudierons des critères de régularité de ces processus, loi du maximum sur un compact, la loi du nombre d'extrema locaux ou la loi du nombre de zéros (volume des zéros si d>1) par les formules de Kac-Rice ou encore le développement en chaos de Wiener. Diverses applications seront proposées : polynômes trigonométriques aléatoires, différents modèles de polynômes algébriques ("Kac", "Elliptiques", "Flat"..)

* **Statistique des processus** (6 ECTS) par

Ce cours traite de diverses procédures d'estimation pour des processus stochastiques à temps continu possédant des sauts. Nous considérons dans un premier temps les propriétés classiques des processus de comptage et de renouvellement, avant d'étudier plus en détail le processus de Poisson simple et ses généralisations comme les processus de Poisson inhomogènes et composés. Les processus de Markov à sauts purs sont également abordés d'un point de vue probabiliste et statistique. On donnera enfin pour terminer quelques méthodes d'estimation pour des modèles de solutions d'équations différentielles stochastiques.

* **trois cours de statistique** (6 ECTS chacun) sont proposés **sur le campus de l'ÉNSAI** :
  ** *Fouille du web et traitement du langage*

  Ce cours est une introduction à la collecte de données textuelles et au traitement automatique du language.

  ** *Analyse des données fonctionnelles*

  Dans ce cours les étudiants apprennent les idées principales, la théorie associée et les routines numériques de l'analyse des données fonctionnelles.

  ** *Statistique bayésienne*

  Dans ce cours les étudiants apprennent les idées principales et la théorie associée de la statistique bayésienne.

Thématique « algèbre et géométrie »

Premier semestre.

* **Théorie de Galois** (6 ECTS) par Lionel Fourquaux

Il s'agit d'une introduction à la théorie de Galois. Plan prévisionnel du cours :
* extensions normales, séparables, galoisiennes ; groupe de Galois ;
* correspondance de Galois ;
* exemples, dont les corps finis et les corps de nombres ;
* applications classiques : équations résolubles par radicaux, constructions géométriques ;
* lien avec la factorisations des idéaux, inertie et ramification.

Si le temps le permet, on abordera certains de thèmes suivants plus avancés :
* groupes de ramification supérieure ; théorème de Herbrand ;
* extensions cycliques et Hilbert 90 ;
* théorie de Kummer ;
* cohomologie galoisienne ;
* symbole d'Artin et théorie du corps de classes.

* **Géométrie algébrique et cohomologie I** (6 ECTS) par Matthieu Romagny

* **Géométrie algébrique et cohomologie II** (6 ECTS) par Matthieu Romagny

Ce cours (I et II) présentera les objets et techniques de base de la géométrie algébrique moderne. Dans celle-ci, les variétés algébriques classiques sont remplacées par les schémas. Les questions arithmétiques (étude de variétés définies sur tous types de corps et leurs points rationnels), différentielles (étude des espaces tangents et des déformations de variétés), géométriques (intersections) trouvent ici un cadre naturel pour être posées et étudiées. Parmi les techniques les plus importantes pour étudier les schémas, la cohomologie des faisceaux sera présentée, ainsi que quelques grandes applications (théorème des fonctions formelles, théorème de connexité de Zariski, factorisation de Stein).
Plan prévisionnel du cours :
1. Rappels : Nullstellensatz de Hilbert ; catégories et foncteurs. 2. Schémas 3. Propriétés de schémas 4. Morphismes des schémas 5. Faisceaux de modules 6. Cohomologie et applications

* **Differential topology and de Rham cohomology I** (6 ECTS) par Juan Suoto

Although it makes sense to take this course by itself, it is thought to be the first half of a two part course. Our main goal here is to introduce and learn to work with manifolds, bundles, sections, flows, Lie groups and other such standard notions of differential topology. For example we will prove the (weak) Whitney embedding theorem (n-manifolds can be embedded into euclidean space of dimension $2n+1$), the Brouwer fixed point theorem (every continuous self map of the closed ball in euclidean space has a fixed point), or the hairy ball theorem (every vector field on the 2-sphere vanishes somewhere). From a technical point of view, the main goal is to discuss differential forms and prove Stoke's theorem. The reason why Stoke's is so important will become clear in the second part of the course.

* **Differential topology and de Rham cohomology II** (6 ECTS) par Juan Suoto

This is a sequel to the first part, and indeed the first part is required. Our focus here is to introduce de Rham cohomology and prove the main results of the theory : Mayer-Vietoris, Poincare Duality, Künneth formula, the topologial invariance of de Rham cohomology and so on. Evidently we will also compute the de Rham cohomology groups in some cases, and we will get applications such as the Hopf index formula, the topological invariance of the Euler characteristic, or the Lefschetz fixed point theorem. de Rham cohomology is truly beautiful mathematics, and a fantastic way to get in touch with cohomology and the needed homological algebra (we will workout in the course all the algebra needed).

* **Logique Mathématique** (6 ECTS) par Guillaume Aucher

Ce cours serait une introduction aux principales théories et résultats de logique mathématique – théorie des ensembles, théorèmes de Gödel, théorie des modèles, théorie des types – ainsi qu'à certaines de ses applications en mathématiques – analyse non-standard, décidabilité de la géométrie Euclidienne.

Second semestre.

* **Condensed mathematiques** (6 ECTS) par Bernard Le Stum

Vector spaces usually come with a topology, and linear maps between them are required to be continuous. In particular, an isomorphism is not only supposed to be linear and bijective, but it also needs to be a homeomorphism. Unfortunately, it is not true anymore in this situation that a linear map whose kernel and cokernel vanish is an isomorphism. The baby example is given by the identity on the real line $\mathbf{R}$ when $\mathbf{R}$ is given the discrete topology on one side and its usual topology on the other. In particular, all the standard tools from commutative algebra are not anymore available when some topology is involved. Mathematicians have been trying to resolve this issue for some time now, starting maybe with the work of Choquet in the late 40's and formalized by Johnstone in the 70's. The idea is to consider not only the points of a given topological space X but also the set of all convergent sequences in it. A point of X may be seen as a (continuous) map on a point $\bullet$ with values in X and a convergent sequence may be seen as a continuous map on the one-point compactification S of the set of integers $\mathbf{N}$ with values in X. Let us denote by $X(\bullet)$ and $X(S)$ the corresponding sets. They are not unrelated because there are evaluation maps $X(S) \to X(\bullet)$ obtained by composing with the various points of S (meaning maps from $\bullet$ to S). One may then consider more generally any couple of sets $X(\bullet)$ and $X(S)$, even those that do not come from a topological space, endowed with a family of maps from $X(S)$ to $X(\bullet)$. In modern language, this is a sheaf on the site of points of S. The category of these sheaves may be seen as an enlargement of the category of topological spaces. Although promising, this is not completely satisfying because the closed unit interval for example will not have the expected compactness properties. Note that the topological space S is compact Hausdorff and totally disconnected (the connected components are the points). The idea of Clausen and Scholze is to actually use the site of all compact Hausdorff totally disconnected spaces and not merely the site of points of S. A condensed set is then simply a sheaf on this site. And a condensed group is a sheaf of groups on this site. It happens that condensed abelian groups have all the expected properties from commutative algebra (this is even amazing). There also exists a notion of completion in this theory called solidification that matches usual non-archimedean completion. Clausen and Scholze are then able to provide very elegant proofs of several theorems from algebraic geometry and even obtain new results. The idea is that, even if we know that some topological spaces will be finite dimensional in the end, infinite dimensional spaces arise naturally in the course of the proofs and the condensed structure allows one to work with them almost as if they were finite dimensional. Note that there also exists a notion of liquid vector space that matches Banach spaces in the archimedean world.

* **Théorie de Galois différentielle** (6 ECTS) par Guy Casale

Ce cours est une introdution à la theorie de Galois des équations differentielles presentées de manière géometrique via la notion de feuilletage.
1 - Etude locale en un point régulier, théorème de Cauchy. Notion de feuilletage : théorème de Frobenius.
2- Théorie de Galois différentielle
- approche algébrique via les extensions de corps différentiels
- traduction géométrique via la réduction du groupe d'une connexions principales
3 - Equations differentielles linéaire sur une surface de Riemann
- étude des singularités régulières (et irrégulières)
- representation de monodromy (et phénomènes de Stokes)
- théorème de densité de Schlessinger (et théorème de densité de Ramis)
4 - Exemples : équation du second ordre
- Equations hypergeometriques
- Famille de Legendre et son équation de Picard-Fuchs
- Structure projective sur une courbe algébrique complexe.

* **Géométrie semi-riemannienne & calcul des variations** (6 ECTS) par Éric Loubeau

Le cours fournira un cadre commun aux géométries riemanniennes et lorentziennes en étudiant les notions classiques de géométrie semi-riemannienne : métriques semi-riemanniennes, transport parallèle, connexion, courbure, champs de Killing, géodésiques, *etc.* Il présentera en particulier le problème des géodésiques sous forme variationnelle. Pour conclure il discutera les applications harmoniques sur les variétés riemanniennes.

* **Aspects algorithmiques en Algèbre et Géométrie pour la cryptographie** (6 ECTS) par Jade Nardi

Ce module se compose de 2 parties indépendantes. La première est la suite naturelle du cours de codes correcteurs de M1 et s'attarde sur les aspects cryptographiques des codes correcteurs ainsi que sur les codes algébriques. On étudiera en particulier quelques familles de codes structurés sur lesquels reposent divers cryptosystèmes résistants aux ordinateurs quantiques que ce soit en métrique de Hamming ou en métrique rang. La seconde partie traite de la théorie algorithmique des nombres utile en cryptographie. Il n'est pas nécessaire d'avoir des connaissances particulières en cryptographie mais de bonnes bases en algèbre et en arithmétique sont indispensables. Les aspects théoriques de base sur les courbes elliptiques sont également nécessaires. On s'intéressera entre autres aux méthodes de preuve de primalité et de factorisation avancées, au comptage de points sur les courbes elliptiques définies sur des corps finis et à la résolution de systèmes non linéaires via les bases de Gröbner.

Thématique « analyse »

Premier semestre.

* **Théorie spectrale** (6 ECTS) par Zied Ammari

Ce cours est un introduction aux opérateurs non bornés, qui généralisent les matrices aux espaces de dimension infinie. On discutera de leur spectre, et on appliquera les résultats théoriques aux opérateurs différentiels (ou pseudo-différentiels), souvent issus de la physique.

* **Analyse microlocale** (6 ECTS) par San Vu Ngoc

Ce cours fait suite à celui de *Théorie spectrale*. Il a trait à l'étude des opérateurs pseudodifférentiels, qui sont une généralisation des opérateurs différentiels et permettent une résolution particulièrement agréable de certaines équations aux dérivées partielles linéaires. On se concentrera sur la version dite semiclassique, qui met bien en valeur les aspects géométriques, et permet des applications à la théorie spectrale des opérateurs de type Schrödinger.

* **Espaces de Sobolev & équations elliptiques** (6 ECTS) par Roger Lewandowski

La première partie du cours concerne les espaces de Sobolev. On montrera les théorèmes d'injection de Sobolev dans le cas d'ouverts assez généraux. On étudiera les espaces fractionnaires et la théorie des traces. La deuxième partie sera consacrée aux équations aux dérivées partielles elliptiques. Le cas linéaire sera d'abord considéré, avec différents types de conditions aux limites. Enfin, des techniques adaptées aux équations elliptiques non-linéaires seront introduites (méthodes de Galerkin, de point fixe, *etc.*).

* **Équations hyperboliques** (6 ECTS) par Miguel Rodrigues

Ce cours fait suite à celui intitulé *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Il s'agit d'une introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles d'évolution, menée sur l'exemple des systèmes hyperboliques quasi-linéaires. L'essentiel du cours est consacré aux lois de conservation scalaires non linéaires, et en étudie à la fois les solutions fortes et entropiques, mais il aborde aussi les systèmes hyperboliques linéaires. En chemin, pour considérer les limites de viscosité évanescente, nous verrons quelques rudiments sur les systèmes paraboliques semi-linéaires.

* **Méthode des élements finis** (6 ECTS) par François Castella et Eric Darrigrand

Ce cours est un pendant numérique du cours *Espaces de Sobolev & équations elliptiques*. Après des rappels sur les équations elliptiques linéaires, le cours aborde l'approximation des solutions associées par la méthode des éléments finis. L'élaboration et l'analyse de ces méthodes sera abordé en dimension arbitraire. S'en suit une mise en œuvre des éléments finis selon un algorithme générique basé sur la formulation variationnelle. Le cours inclut un travail pratique à réalisé en utilisant un des langages de programmation courants au choix (`Matlab`, `Octave`, `Scilab`, `Python`,...).

* **Numérique du transport** (6 ECTS) par Benjamin Boutin

Ce cours est le pendant numérique du cours *Équations hyperboliques*. Une première partie portera sur l'analyse des schémas de différences finies. Les problématiques de stabilité et de consistance pour de tels schémas considérés en domaine infini ou périodique ainsi qu'en domaine borné seront abordées. Dans un deuxième temps, l'approximation des solutions faibles entropiques de lois de conservation hyperboliques non-linéaires sera étudiée via la construction et l'analyse de la méthode des volumes finis. Des développements récents de tels schémas seront abordés.

Second semestre.

* **Equations d'ondes non linéaires et relativité générale** (6 ECTS) par Léo Bigorgne

Dans un premier temps, nous étudierons des propriétés d'existence locale pour une classe d'équations d'ondes non linéaires. Cela nous permettra de montrer que les équations d'Einstein, qui peuvent être reformulées sous la forme d'un système d'équations d'ondes quasi-linéaires, sont bien posées. La seconde partie du cours concernera l'étude des solutions à données petites d'équations simplifiées intervenant dans la démonstration de la stabilité de l'espace-temps de Minkowski.

* **Propagation d'ondes en milieu complexe** (6 ECTS) Geoffrey Beck

Une onde acoustique est créée par la vibration d'une membrane dans une flûte. Elle se propage dans cette dernière avant de s'échapper par une fente. L'acoustique est-elle la même quand le public est présent et que l'onde est perturbé par la présence de toutes ces personnes ? La résolution numérique de ce genre de problème de propagation peut devenir très coûteuse si l'espace à mailler est trop grand, si le milieu dans lequel se propage les ondes est trop complexe ou si les ondes passent dans des géométries singulières comme de fines fentes. La philosophie de ce cours est de construire intelligemment des conditions de bords, potentiellement artificielles, de façon à proposer des schémas numériques plus simple et efficace que de brutalement raffiner des maillages au voisinage des zones problématiques.

* **Théorie du Contrôle et Contrôle Optimal** (6 ECTS) par Piernicola Bettiol et Jérémy Rouot

La première partie du cours sera consacrée à une introduction à la Théorie du Contrôle et au Contrôle Optimal. Les systèmes contrôlés sont des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle (ou commande) pour obtenir des trajectoires (solutions d'un système contrôlé) opportunes. Une première question concerne l'existence de trajectoires entre un état initial du système et un état final, c'est le problème de contrôlabilité. Ensuite vient la question du contrôle optimal dont l'objectif est de déterminer les meilleures trajectoires pour un certain critère d'optimisation donné, par exemple minimiser le temps d'atteinte à une cible, ou (dans certaines applications) la consommation d'énergie. Dans ce cours on va traiter des fondamentaux en Théorie du Contrôle et en Contrôle Optimal. On commencera en fournissant les outils essentiels de ce domaine avec l'objectif d'arriver à comprendre certaines questions importantes, classiques et au même temps modernes telles que les conditions nécessaires d'optimalité (les conditions d'Euler-Lagrange, le principe du maximum). On discutera de la difficulté de déterminer une solution complète au problème de contrôle optimal et comment l'appréhender avec une approche globale basée sur le principe de la programmation dynamique et une approche locale basée sur une étude géométrique du principe du maximum permettant de déterminer la structure des trajectoires optimales.